



ארגז הכלים – הגדרות ונוסחאות התפלגות נורמלית

התפלגות נורמלית Normal distribution סימון: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

מאפיינים

ההתפלגות הנורמלית היא אחת מההתפלגויות הרציפות החשובות והשימושיות ביותר. התפלגויות אמפיריות של תופעות רבות במציאות הן בעלות התפלגות נורמלית בקירוב.

הערכים האפשריים: רצף המספרים מ- $-\infty$ עד $+\infty$.

הפרמטרים של ההתפלגות: μ = התוחלת (ציר הסימטריה), σ^2 = השונות (מידת הפיזור).

פונקציית הצפיפות¹:

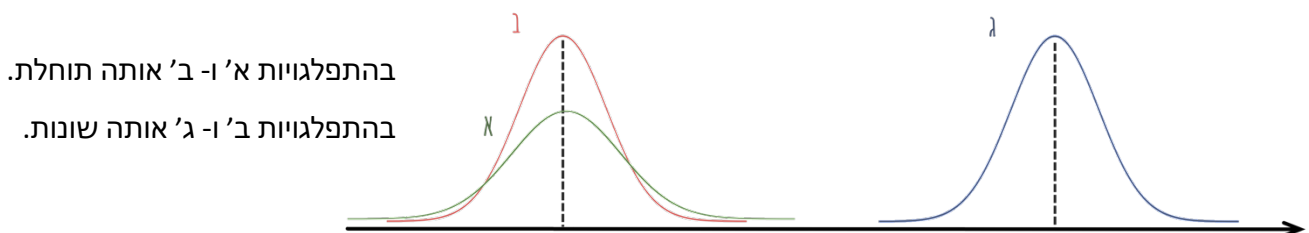
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty$$

תוחלת: $E(X) = \mu$

שונות: $Var(X) = \sigma^2$ **סטיית תקן:** σ

התפלגות נורמלית היא התפלגות פעמונית וסימטרית (תוחלת=חציון=שכיח).

להלן שרטוט של שלוש התפלגויות נורמליות על אותו ציר X:



שמות נוספים להתפלגות נורמלית: התפלגות גאוס/גאוסיאנית (על שם Carl Friedrich Gauss).

¹ פונקציית הצפיפות של ההתפלגות הנורמלית מוצגת כאן לידע כללי. בקורס שלנו לא נעשה שימוש בפונקציית הצפיפות של התפלגות נורמלית, כיוון שכל החישובים יעשו בעזרת ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית, וטבלת Z.





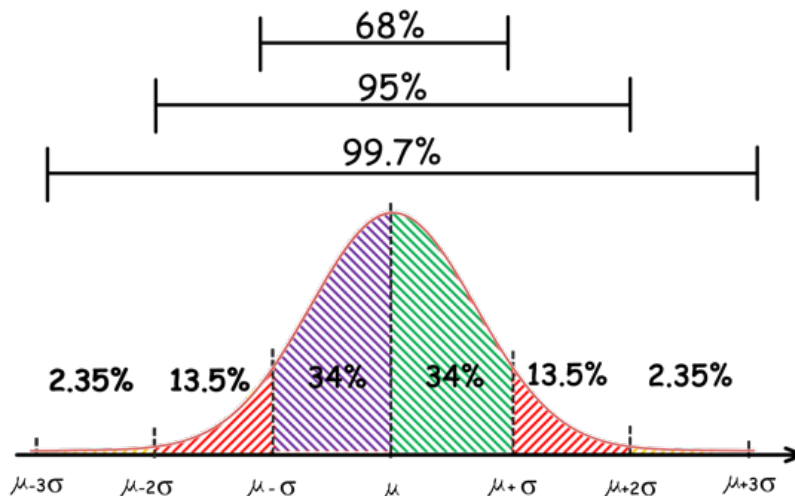
עקרונות בחישוב הסתברויות עם התפלגות נורמלית

- ההתפלגות הנורמלית סימטרית סביב התוחלת.
- סך השטח מתחת לעקומת ההתפלגות שווה ל-1.
- לכן השטח מימין לערך מסוים שווה ל-1 פחות השטח משמאל לערך זה.
- חישוב שטח בין שני ערכים נעשה ע"י הפחתת שטחים:
- השטח משמאל לערך הגדול פחות השטח משמאל לערך הקטן.

כלל ה 68% - 95% - 99.7% (החוק האמפירי)

בכל התפלגות נורמלית מתקיים הכלל הבא:

- כ- 68% מהשטח בהתפלגות נמצא בטווח של סטיית תקן אחת מהתוחלת, כלומר: בין $\mu - \sigma$ ל- $\mu + \sigma$
- כ- 95% מהשטח בהתפלגות נמצא בטווח של 2 סטיות תקן מהתוחלת, כלומר: בין $\mu - 2\sigma$ ל- $\mu + 2\sigma$
- כ- 99.7% מהשטח בהתפלגות נמצא בטווח של 3 סטיות תקן מהתוחלת, כלומר: בין $\mu - 3\sigma$ ל- $\mu + 3\sigma$



- כלל זה נקרא גם "החוק האמפירי" כיוון שהוא מתקיים בהתפלגויות אמפיריות רבות.
- כלומר: כ- 68% מהנתונים נמצאים במרחק של עד סטיית תקן אחת מהממוצע.
- כ- 95% מהנתונים נמצאים במרחק של עד 2 סטיות תקן מהממוצע.
- כמעט כל הנתונים נמצאים במרחק של עד 3 סטיות תקן מהממוצע.





ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית Standard normal distribution סימון: $Z \sim N(0,1)$

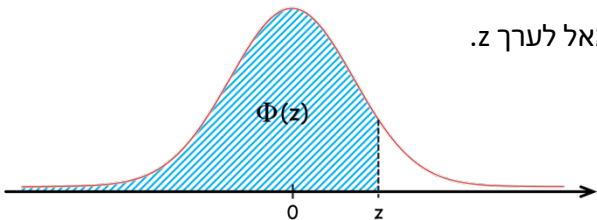
ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית היא התפלגות נורמלית מיוחדת, ובה התוחלת שווה ל 0 והשונות שווה ל 1.

נהוג לסמן את המשתנה הנורמלי הסטנדרטי ב- Z .

נהוג לסמן את פונקציית ההתפלגות המצטברת של מ"מ נורמלי סטנדרטי ב- $\Phi(z)$.

כלומר: $\Phi(z) = P(Z \leq z)$

$\Phi(z)$ = השטח מתחת לפונקציית הצפיפות הנורמלית הסטנדרטית, משמאל לערך z .



שימו לב: התפלגות נורמלית סטנדרטית היא התפלגות סימטרית סביב 0.

טבלת Z

להתפלגות הנורמלית הסטנדרטית נבנתה טבלה שבה

מופיעים ערכי Z ושטחים (=הסתברויות).

אנו ניעזר בטבלת Z המכילה שטחים משמאל לערך z

עבור ערכים אי-שליליים של Z .

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

מבנה הטבלה

הטבלה מכילה ערכים של Z וערכים של פונקציית

ההתפלגות המצטברת של Z , כלומר: $\Phi(Z)$.

בשולי הטבלה (בצהוב) מופיעים ערכי Z .

בעמודה השמאלית: ספרת האחדות וכן הספרה הראשונה

אחרי הנקודה העשרונית, ובשורה העליונה: הספרה

השנייה אחרי הנקודה העשרונית.

בתוך הטבלה (בתכלת) מופיעים ערכי $\Phi(Z)$, כלומר:

שטחים משמאל לערך הנתון של Z .

² ישנן וריאציות שונות של טבלת z , כגון טבלאות עם שטח מימין, טבלאות גם עבור ערכים שליליים של z , וכו'. מומלץ לוודא איזו טבלה

תהיה במבחן, ולהשתמש בה. כמו כן, יש כלים נוספים, כגון מחשבוני, אקסל ותוכנות אחרות שמחשבות שטחים.





כללי עבודה עם התפלגות נורמלית סטנדרטית

א. חישוב שטח (הסתברות) משמאל לערך חיובי של Z :

זהו החישוב הפשוט ביותר, כיוון שבטבלה יש שטחים משמאל עבור ערכי Z אי-שליליים.

ב. חישוב שטח מימין לערך חיובי של Z :

נעזרים בעובדה כי סך השטח מתחת להתפלגות שווה ל-1:

$$P(Z > z) = 1 - P(Z \leq z) = 1 - \Phi(z)$$

ג. חישוב שטח משמאל לערך שלילי של Z :

נעזרים בסימטריה של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית סביב 0 :

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

ד. חישוב שטח מימין לערך שלילי של Z :

נעזרים בסימטריה של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית סביב 0 :

$$P(Z > -z) = 1 - \Phi(-z) = \Phi(z)$$

ה. חישוב שטח בין שני ערכים:

$$P(a \leq Z \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

ו. מציאת ערך של Z שהשטח משמאלו נתון.

השטח משמאל ניתן לביטוי בהסתברות או כאחוזים. הערך המבוקש מכונה אחוזון (percentile).

למשל: הערך z , שהשטח משמאלו הוא 0.9 (90%) נקרא "אחוזון 90" (עשירון עליון).

תהליך החישוב "הפוך" : מוצאים שטח בתוך הטבלה, ויוצאים לשוליים כדי לקבל את הערך של Z .

סימון: z_p = הערך בהתפלגות הנורמלית הסטנדרטית שהשטח משמאלו הוא p .

למשל, אחוזון 90 מסומן: $z_{0.9}$

$$z_p = -z_{1-p} \quad \text{קשר חשוב:}$$

הערך שהשטח משמאלו הוא p שווה למינוס הערך שהשטח משמאלו הוא $1-p$.

קשר זה נובע ממתכונת הסימטריה של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית סביב 0.





תקנון standardization

על-מנת לחשב הסתברויות בהתפלגות נורמלית כלשהי, שאינה סטנדרטית, יש לבצע תקנון (סטנדרטיזציה).

נוסחת התקנון

עבור משתנה מקרי X עם תוחלת $E(X) = \mu$ ושונות $Var(X) = \sigma^2$,

נגדיר משתנה מקרי חדש באופן הבא:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

למשתנה המקרי Z יש תוחלת 0 ושונות 1.

Z הוא משתנה מקרי מתוקן.

שימו לב: המונה מבטא הזזה של ההתפלגות, וכתוצאה מכך התוחלת תהיה 0. החלוקה בסטיית התקן של X

מבטלת את יחידות המדידה של X ומשנה את הפיזור. כתוצאה מכך השונות תהיה 1. לכן המשתנה נקרא

"מתוקן". יוצרים התפלגות חדשה שבה תמיד התוחלת היא 0 והשונות 1.

לכל ערך a של X , הערך המתוקן של a מחושב לפי נוסחת התקנון, כלומר: $\frac{a - \mu}{\sigma}$.

הערך הזה נקרא גם **ציון תקן**, **ערך תקן** (standard score).

המשמעות של הערך המתוקן

הערך המתוקן של a מבטא את המרחק של הערך a מהתוחלת, ביחידות של סטיית תקן.

ציון תקן חיובי: הערך גדול מהתוחלת.

ציון תקן שלילי: הערך קטן מהתוחלת.

ציון תקן 0: הערך שווה לתוחלת.

תקנון של משתנה מקרי נורמלי

בהתפלגות נורמלית, התקנון מעביר להתפלגות נורמלית סטנדרטית.

כלומר: עבור $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, המשתנה המקרי המתוקן הוא: $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$,

ומתקיים: $Z \sim N(0, 1)$.





כללים לחישוב הסתברויות בהתפלגות נורמלית לא סטנדרטית $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

א. חישוב שטח (הסתברות) משמאל לערך נתון של X : מחשבים את ציון התקן, ומוצאים את השטח המתאים בטבלה של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית.

$$P(X \leq a) = \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

ב. חישוב שטח מימין לערך נתון של X :

$$P(X > a) = 1 - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

ג. חישוב שטח בין שני ערכים של X :

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

ד. מציאת הערך של X שהשטח משמאלו נתון:

החישוב הוא "הפוך":

- מוצאים את השטח בטבלת ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית
- מוצאים את הערך של Z (בשולי הטבלה)
- מחשבים את הערך של X לפי הנוסחה: $X = Z \cdot \sigma + \mu$

שימו לב:

- אם נתון שטח מימין, יש לחשב קודם את השטח משמאל ואז לגשת לטבלה.
- אם נתון שטח משמאל והוא קטן מ-0.5, יש להשתמש בתכונת הסימטריה של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית.

המלצה: בכל שאלה על התפלגות נורמלית מומלץ לשרטט את עקומת ההתפלגות ולסמן את השטחים המבוקשים, כדי להבין מה בדיוק צריך לחשב.

