



ארגז הכלים – הגדרות ונוסחאות התפלגויות רציפות מיוחדות

התפלגות אחידה Uniform distribution **סימון:** $X \sim U(a, b)$

מאפיינים

משתנה מקרי רציף בעל התפלגות אחידה הוא משתנה מקרי שמקבל רצף של ערכים מ a עד b כאשר פונקציית הצפיפות היא ערך קבוע בכל האינטרוול (a, b) .

הערכים האפשריים של X : כל הערכים באינטרוול (a, b) , $a < b$.

הפרמטרים של ההתפלגות: a = הערך האפשרי המינימלי b = הערך האפשרי המקסימלי

פונקציית הצפיפות

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

פונקציית ההתפלגות המצטברת

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \leq t < b \\ 1 & t \geq b \end{cases}$$

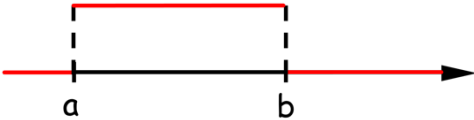
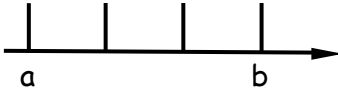
התוחלת: $E(X) = \frac{a+b}{2}$ (ציר הסימטריה של ההתפלגות)

השונות: $\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$





התפלגות אחידה בדידה לעומת התפלגות אחידה רציפה

אחידה רציפה	אחידה בדידה	
$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$P(X = k) = \frac{1}{b-a+1}$ $k = a, a+1, \dots, b$	פונקציית הסתברות/צפיפות
		שרטוט
$E(X) = \frac{a+b}{2}$	$E(X) = \frac{a+b}{2}$	תוחלת
$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$	$\text{Var}(X) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$	שונות

שימו לב: התפלגות אחידה יכולה להיות בדידה או רציפה. לפי הנתונים נצטרך להסיק אם מדובר במשתנה מקרי בדיד (רשימה של ערכים) או במשתנה מקרי רציף (רצף של ערכים), ולהשתמש בנוסחאות המתאימות.





התפלגות מעריכית/אקספוננציאלית Exponential distribution

מאפיינים

לרוב, משתנה מקרי מעריכי יבטא משך זמן. ישנם שני מצבים נפוצים בהם מתקבלת ההתפלגות המעריכית:

1. משך הזמן בין שני אירועים עוקבים בתהליך פואסון.

2. משך הזמן של פעילות/תהליך. (במקרה כזה יינתן מידע מפורש שההתפלגות מעריכית)

דוגמאות נפוצות למשתנה מקרי מעריכי: משך הזמן בין הגעת לקוחות לבנק, משך הזמן בין הגעת מכוניות למוסך, משך הזמן בין רעידות אדמה. משך הזמן של שיחת טלפון, משך הזמן שרכיב אלקטרוני פועל, משך הזמן של קבלת שירות (בבנק, בקופה בסופר, וכו').

הערכים האפשריים של X: כל רצף המספרים מ-0 עד אינסוף.

הפרמטר של ההתפלגות: λ

פונקציית הצפיפות

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

פונקציית ההתפלגות המצטברת

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$$

מסקנה: $P(X > t) = e^{-\lambda t}$

התוחלת: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

השונות: $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$





תכונת חוסר הזיכרון memoryless property

$$s, t > 0 \quad \text{לכל} \quad P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t) = e^{-\lambda t}$$

המשמעות של תכונת חוסר הזיכרון:

נניח שמשך זמן שיחת טלפון מתפלג מעריכית, וידוע שהשיחה נמשכה יותר מ s יחידות זמן. לפי תכונת חוסר הזיכרון, ההסתברות כי השיחה תימשך יותר מ $t+s$ יחידות זמן זהה להסתברות הלא מותנית, שמשך השיחה מתחילתה יהיה יותר מ t יחידות זמן. כלומר: מכל נקודת זמן במהלך השיחה, התפלגות משך הזמן הנותר נשארת מעריכית, ואינה מושפעת ממשך השיחה עד אותה נקודת זמן.

התפלגות גיאומטרית היא ההתפלגות הבדידה היחידה המקיימת את תכונת חוסר הזיכרון. התפלגות מעריכית היא ההתפלגות הרציפה היחידה המקיימת את תכונת חוסר הזיכרון.

הקשר בין התפלגות מעריכית להתפלגות פואסונית

המשתנה המקרי הפואסוני סופר את מספר האירועים המתרחשים לאורך זמן. λ הוא **קצב המופע, קצב התרחשות** האירועים בפרק הזמן, כלומר: **ממוצע** מספר האירועים הצפוי (תוחלת) בפרק הזמן הנבדק. התהליך של האירועים נקרא תהליך פואסון.¹ בתהליך פואסון, משך הזמן החולף בין שני אירועים עוקבים הוא משתנה מקרי מעריכי.

להלן טבלה עם ההבדלים בין שתי ההתפלגויות (פואסונית ומעריכית) בהקשר של תהליך פואסון:

מאפיינים של שתי התפלגויות בתהליך פואסון

משתנה מקרי מעריכי	משתנה מקרי פואסוני	
רציף	בדיד	סוג המשתנה (בדיד/רציף)
כל רצף המספרים מ 0 עד אינסוף	מספרים שלמים מ 0 עד אינסוף	הערכים האפשריים
מודד את <u>משך הזמן</u> החולף בין אירועים עוקבים	סופר את <u>מספר</u> האירועים המתרחשים ביחידת זמן	משמעות המשתנה המקרי
$\frac{1}{\lambda}$ = משך הזמן הממוצע בין שני אירועים עוקבים	λ = קצב המופע, ממוצע מספר אירועים ביחידת זמן	התוחלת ומשמעותה

¹ תהליך פואסון הוא נושא מרכזי בתורת התורים ובתחומים רבים נוספים. בקורס שלנו הדיון בהתפלגות פואסון מצומצם יחסית.

