



ארגז הכלים – הגדרות ונוסחאות התפלגויות בדידות מיוחדות

ניסוי ברנולי Bernoulli trial

ניסוי ברנולי הוא ניסוי מקרי שבו חלק מהתוצאות נחשבות "הצלחה" ויתר התוצאות נחשבות "כישלון".

התפלגות בינומית Binomial distribution סימון: $X \sim B(n, p)$ או $X \sim \text{Bin}(n, p)$

מאפיינים

- מבצעים n ניסויי ברנולי בלתי תלויים.
- ההסתברות להצלחה בכל ניסוי היא p .
- המשתנה המקרי X סופר את מספר ההצלחות מתוך n הניסויים.

הערכים האפשריים של X : $0, 1, \dots, n$

הפרמטרים של ההתפלגות: $n =$ מספר ניסויי הברנולי הבלתי תלויים. $p =$ ההסתברות להצלחה בכל ניסוי.

פונקציית ההסתברות:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

התוחלת: $E(X) = np$

השונות: $\text{Var}(X) = np(1 - p)$

שימו לב: התפלגות בינומית היא התפלגות סימטרית רק אם $p=0.5$.





התפלגות גיאומטרית Geometric distribution סימון: $X \sim G(p)$ או $X \sim \text{Geo}(p)$

מאפיינים

- מבצעים ניסויי ברנולי בלתי תלויים בזה אחר זה.
- ההסתברות להצלחה בכל ניסוי היא p .
- המשתנה המקרי X סופר את מספר הניסויים עד (וכלל) ההצלחה הראשונה.

הערכים האפשריים של X : $1, 2, 3, \dots$ (משתנה מקרי בדיד עם אינסוף ערכים אפשריים)
הפרמטר של ההתפלגות: p = ההסתברות להצלחה בכל ניסוי.

פונקציית ההסתברות:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{התוחלת:}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2} \quad \text{השונות:}$$

תכונות של התפלגות גיאומטרית:

- $P(X > k) = (1 - p)^k$ לכל k שלם חיובי.
הסבר: המאורע "יהיו יותר מ- k ניסויים עד ההצלחה הראשונה" שקול למאורע " k הניסויים הראשונים היו כישלון".
- **תכונת חוסר הזיכרון:** $P(X = k + m \mid X > k) = P(X = m)$ לכל k, m שלמים חיוביים.¹

שימו לב: התפלגות גיאומטרית היא אסימטרית. בדיאגרמת המקלות שמתארת את ההתפלגות המקלות נעשים נמוכים יותר ככל שהערך של X גדל, לפי סדרה גיאומטרית.

שימו לב: ישנם ספרים/מרצים שמגדירים משתנה מקרי גיאומטרי כמשתנה מקרי שסופר את מספר הכישלונות עד ההצלחה הראשונה. במקרה כזה פונקציית ההסתברות שונה, וגם התוחלת שונה.

¹ התפלגות גיאומטרית היא ההתפלגות הבדידה היחידה המקיימת את תכונת חוסר הזיכרון.





התפלגות בינומית שלילית ²Negative Binomial distribution סימון: $X \sim \text{NB}(r, p)$

מאפיינים

- מבצעים ניסויי ברנולי בלתי תלויים בזה אחר זה.
- ההסתברות להצלחה בכל ניסוי היא p .
- המשתנה המקרי X סופר את מספר הניסויים עד (וכלל) ההצלחה ה- r .

הערכים האפשריים של X : $r, r+1, r+2, \dots$ (משתנה מקרי בדיד עם אינסוף ערכים אפשריים)
הפרמטרים של ההתפלגות: $r =$ מספר ההצלחות. $p =$ ההסתברות להצלחה בכל ניסוי.

פונקציית ההסתברות:

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \quad k = r, r+1, \dots$$

התוחלת: $E(X) = \frac{r}{p}$

השונות: $\text{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$

שימו לב: התפלגות גיאומטרית היא מקרה פרטי של התפלגות בינומית שלילית, עבור $r=1$.

שימו לב: ישנם ספרים/מרצים שמגדירים משתנה מקרי בינומי שלילי כמשתנה מקרי שסופר את מספר ה**כישלונות** עד ההצלחה ה- r . במקרה כזה פונקציית ההסתברות שונה, וגם התוחלת שונה.

² התפלגות פסקל (Pascal) הוא שם מקובל נוסף להתפלגות בינומית שלילית.





התפלגות היפרגאומטרית Hypergeometric distribution סימון: $X \sim \text{HG}(N, D, n)$

מאפיינים

- אוכלוסייה מכילה N פרטים, ומתוכם D "מיוחדים".
- בוחרים באופן מקרי וללא החזרה n פרטים מתוך האוכלוסייה.
- המשתנה המקרי X סופר את מספר הפרטים המיוחדים מתוך n הפרטים שנבחרו.

הערכים האפשריים של X : $0, 1, \dots, n$

הפרמטרים של ההתפלגות: N = מספר הפרטים באוכלוסייה

D = מספר הפרטים המיוחדים באוכלוסייה

n = מספר הפרטים שבחרים באופן מקרי וללא החזרה

פונקציית ההסתברות:

$$P(X = k) = \frac{\binom{D}{k} \binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

התוחלת: $E(X) = n \frac{D}{N}$

השונות: $\text{Var}(X) = n \frac{D}{N} \left(1 - \frac{D}{N}\right) \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$

שימו לב: אם בוחרים פרטים עם החזרה, אז מתקבלת התפלגות בינומית.

הערה: בהתאם לערכי הפרמטרים, ייתכנו מצבים בהם רשימת הערכים האפשריים של X (עבורם ההסתברות גדולה מ-0)

מצטמצמת. אין זה הכרחי, אך ניתן לכתוב אותה בצורה פורמלית יותר.⁴

³ יש מרצים/ספרים שמשתמשים בגרסאות אחרות ובסדר אחר לכתיבת הפרמטרים של התפלגות היפרגאומטרית.

⁴ אם $D < n$ אז הערך האפשרי המקסימלי של X הוא D (במקום n), ואם $n - D < N$ אז הערך האפשרי המינימלי של X הוא $n - (N - D)$ (במקום 0). בקיצור: $\max\{0, n - (N - D)\} \leq X \leq \min\{n, D\}$.





התפלגות פואסון Poisson distribution סימון: $X \sim P_o(\lambda)$ או $X \sim P_{ois}(\lambda)$

מאפייני

רוב הדוגמאות של התפלגות פואסון מתייחסות לאירועים (מופעים) המתרחשים לאורך זמן.⁵ המשתנה המקרי הפואסוני סופר את מספר המופעים בפרק זמן נתון. λ הוא קצב התרחשות האירועים בפרק הזמן, כלומר: **ממוצע** מספר האירועים הצפוי (תוחלת) בפרק הזמן הנבדק. התהליך של האירועים נקרא תהליך פואסון.⁶

הערכים האפשריים של X : $0, 1, 2, \dots$ (משתנה מקרי בדיד עם אינסוף ערכים אפשריים)
הפרמטר של ההתפלגות: $\lambda =$ קצב המופע / המספר הממוצע של אירועים המתרחשים ביחידת זמן. $\lambda > 0$.

פונקציית ההסתברות:

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

התוחלת: $E(X) = \lambda$

השונות: $Var(X) = \lambda$

שימו לב: λ הוא קצב המופע, מספר האירועים שמתרחשים ביחידת זמן נתונה. לכן יש להתאים את λ בהתאם לנתונים.
 למשל, אם $\lambda = 6$ בשעה, אז בחצי שעה הקצב הוא 3, בדקה הקצב הוא 0.1 וביממה הקצב הוא 144.

⁵ דוגמאות לממדים נוספים שמ"מ פואסוני יכול להתייחס אליהם: שטח, נפח.

⁶ תהליך פואסון הוא נושא מרכזי בתורת התורים ובתחומים רבים נוספים. בקורס שלנו הדיון בהתפלגות פואסון מצומצם יחסית.





התפלגות אחידה Uniform distribution סימון: $X \sim U(a, b)$

מאפיינים

בהתפלגות אחידה המשתנה המקרי מקבל ערכים בין a ל b (מספרים שלמים) בקפיצות של יחידה אחת, וההסתברויות לכל אחד מהערכים שוות זו לזו.

הערכים האפשריים של X : $a, a + 1, \dots, b$ כאשר a, b הם שלמים, $a < b$.
הפרמטרים של ההתפלגות: a = הערך האפשרי המינימלי b = הערך האפשרי המקסימלי

פונקציית ההסתברות:

$$P(X = k) = \frac{1}{b - a + 1} \quad k = a, a + 1, \dots, b$$

התוחלת: $E(X) = \frac{a+b}{2}$ (ציר הסימטריה של ההתפלגות)

השונות: $Var(X) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$

שימו לב: התפלגות אחידה יכולה להיות בדידה או רציפה. לפי הנתונים עלינו להסיק האם מדובר במשתנה מקרי בדיד (רשימה של ערכים) או משתנה מקרי רציף (רצף של ערכים), ולהשתמש בנוסחאות המתאימות.





טבלאות מסכמות להתפלגויות הבדידות המיוחדות

טבלה 1: התפלגויות בדידות מיוחדות – מאפיינים וסימון

שם ההתפלגות	סימון	מאפייני ההתפלגות	ערכים אפשריים של המ"מ
בינומית Binomial	$X \sim B(n, p)$	מבצעים n ניסויי ברנולי ב"ת עם הסתברות p להצלחה בניסוי בודד. המ"מ X סופר את מספר ההצלחות ב- n הניסויים.	$0, 1, \dots, n$
גיאומטרית Geometric	$X \sim G(p)$	מבצעים ניסויי ברנולי ב"ת, בזה אחר זה, עם הסתברות p להצלחה בניסוי בודד. המ"מ X סופר את מספר הניסויים עד (וכולל) ההצלחה הראשונה.	$1, 2, 3, \dots$
בינומית שלילית Negative-Binomial	$X \sim NB(r, p)$	מבצעים ניסויי ברנולי ב"ת, בזה אחר זה, עם הסתברות p להצלחה בניסוי בודד. המ"מ X סופר את מספר הניסויים עד (וכולל) ההצלחה ה- r .	$r, r + 1, \dots$
היפרגאומטרית Hypergeometric	$X \sim HG(N, D, n)$	אוכלוסייה מכילה N פרטים, מתוכם D "מיוחדים". בוחרים באופן מקרי וללא החזרה n פרטים מתוך האוכלוסייה. המ"מ X סופר את מספר המיוחדים מתוך n הפרטים שנבחרו.	$0, 1, \dots, n$
פואסונית Poisson	$X \sim \text{Pois}(\lambda)$	בד"כ X הוא מ"מ שסופר את מספר המופעים ("אירועים") המתרחשים לאורך זמן, כאשר λ הוא ממוצע מספר המופעים ביחידת זמן (קצב המופע).	$0, 1, 2, \dots$
אחידה Uniform	$X \sim U(a, b)$	X הוא מ"מ שמקבל ערכים בין a ל- b (מספרים שלמים) בקפיצות של יחידה אחת, וההסתברויות לכל אחד מהערכים שוות זו לזו.	$a, a + 1, \dots, b$





טבלה 2: התפלגויות בדידות מיוחדות – פונקציות ההסתברות, תוחלת ושונות

שם ההתפלגות	פונקציית ההסתברות	תוחלת $E(X)$	שונות $Var(X)$
בינומית Binomial $X \sim B(n, p)$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $k = 0, 1, \dots, n$	$E(X) = np$	$Var(X) = np(1-p)$
גיאומטרית Geometric $X \sim G(p)$	$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$ $k = 1, 2, 3, \dots$	$E(X) = \frac{1}{p}$	$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$
בינומית שלילית Negative-Binomial $X \sim NB(r, p)$	$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$ $k = r, r+1, \dots$	$E(X) = \frac{r}{p}$	$Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$
היפרגאומטרית Hypergeometric $X \sim HG(N, D, n)$	$P(X = k) = \frac{\binom{D}{k} \binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ $k = 0, 1, \dots, n$	$E(X) = n \frac{D}{N}$	$Var(X) = n \frac{D}{N} \left(1 - \frac{D}{N}\right) \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$
פואסונית Poisson $X \sim \text{Pois}(\lambda)$	$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ $k = 0, 1, 2, \dots$	$E(X) = \lambda$	$V(X) = \lambda$
אחידה Uniform $X \sim U(a, b)$	$P(X = k) = \frac{1}{b-a+1}$ $k = a, a+1, \dots, b$	$E(X) = \frac{a+b}{2}$	$Var(X) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$





טבלה 3: מאפיינים של ההתפלגויות: בינומית, גיאומטרית, בינומית שלילית

מאפיין	התפלגות בינומית	התפלגות גיאומטרית	התפלגות שלילית
ניסויי ברנולי בלתי תלויים?	כן	כן	כן
מספר הניסויים קבוע מראש?	כן	לא	לא
בכל ניסוי הסתברות קבועה להצלחה?	כן	כן	כן
מספר ההצלחות נקבע מראש?	לא	כן	כן
אינסוף ערכים אפשריים?	לא	כן	כן
המשתנה המקרי סופר מספר הצלחות?	כן	לא	לא
המשתנה המקרי סופר מספר ניסויים?	לא	כן	כן
המשתנה המקרי יכול לקבל את הערך 0?	כן	לא	לא
יש שני פרמטרים בהתפלגות?	כן	לא	כן

