



ארגז הכלים – הגדרות ונוסחאות קומבינטוריקה

חישוב הסתברויות במרחב מדגם סימטרי דורש ספירה של מספר התוצאות שישנן במרחב המדגם, ומספר התוצאות שישנן במאורע. כלים מקומבינטוריקה¹ יעזרו לנו לפתור שאלות הדורשות ספירה.

העיקרון הבסיסי מאחורי החישובים הקומבינטוריים מבוסס על פירוק הניסוי המקרי לשלבים.

כלל המכפלה product rule

כאשר ניסוי מתבצע ב k שלבים בזה אחר זה, וכאשר בשלב הראשון יש n_1 אפשרויות, בשלב השני יש n_2 אפשרויות, ..., ובשלב ה k יש n_k אפשרויות, אזי מספר התוצאות השונות בניסוי כולו הוא: $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$

במילים פשוטות: מספר התוצאות השונות בניסוי רב-שלבי מחושב ע"י מכפלת מספרי התוצאות האפשריות בכל אחד מהשלבים.

סידור עצמים שונים בשורה (תמורה)²

בכמה אפשרויות ניתן לסדר n עצמים שונים בשורה?

תשובה: $n!$ סימון: P_n

תזכורת: $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ $0! = 1$

סידור עצמים בשורה כאשר ישנם עצמים זהים

נתונים n עצמים: n_1 עצמים זהים מסוג 1, n_2 עצמים זהים מסוג 2, ..., n_r עצמים זהים מסוג r .

בכמה אפשרויות ניתן לסדר את n העצמים?

תשובה: $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$ כאשר $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$

¹ קומבינטוריקה היא ענף במתמטיקה העוסק בבעיות מנייה.

² תמורה (permutation) היא סידור של עצמים שונים בשורה. לכן $n!$ הוא "מספר התמורות של n עצמים שונים".





שלושה מודלים לבחירה של k עצמים מתוך n עצמים שונים

המודלים מספקים נוסחאות לחישוב מספר האפשרויות שבהן ניתן לבחור k עצמים מתוך קבוצה של n עצמים שונים.

כדי לדעת מהו המודל המתאים, יש לברר שני דברים:

1. האם הבחירה היא עם חשיבות לסדר או ללא חשיבות לסדר

עם חשיבות לסדר = יש חשיבות לסדר הבחירה. יש תפקיד/יעוד שונה לכל עצם שנבחר.

ללא חשיבות לסדר = יש משמעות רק לשאלה מי מהעצמים נבחר.

2. האם הבחירה היא עם החזרה או ללא החזרה.

עם החזרה = כל עצם יכול להיבחר יותר מפעם אחת.

ללא החזרה = כל עצם יכול להיבחר לכל היותר פעם אחת.

מתקבלים שלושה מודלים³. בכל מודל נברר כמה אפשרויות יש לבחירת k עצמים מתוך n עצמים שונים.

מודל 1: בחירה עם חשיבות לסדר וללא החזרה

מהו מספר האפשרויות לבחירה של k עצמים מתוך קבוצה של n עצמים שונים,

כאשר הבחירה היא עם חשיבות לסדר וללא החזרה?

תשובה: $\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ סימון: P_n^k שימו לב: $0! = 1$

מקרה פרטי: כאשר $k=n$ נקבל את מספר התמורות של n עצמים שונים.

מודל 2: בחירה ללא חשיבות לסדר וללא החזרה

מהו מספר האפשרויות לבחירה של k עצמים מתוך קבוצה של n עצמים שונים,

כאשר הבחירה היא ללא חשיבות לסדר וללא החזרה?

תשובה: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ "n מעל k" סימון נוסף: C_n^k נקרא המקדם הבינומי.

שימו לב: יש קשר בין מודל 1 למודל 2. כל אפשרות בבחירה ללא חשיבות לסדר מקבילה ל $k!$ אפשרויות

כאשר יש חשיבות לסדר. לכן, המעבר ממודל 1 למודל 2 הוא חלוקה ב $k!$ סידורים פנימיים.

³ למעשה ישנו גם מודל רביעי, בחירה ללא חשיבות לסדר ועם החזרה, אך מודל זה לא כלול בחומר הנלמד.

⁴ בחירה ללא חשיבות לסדר וללא החזרה נקראת צירוף, קומבינציה, combination.





$$\binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{נוסחאות שימושיות:}$$

מודל 3: בחירה עם חשיבות לסדר ועם החזרה

מהו מספר האפשרויות לבחירה של k עצמים מתוך קבוצה של n עצמים שונים,

כאשר הבחירה היא עם חשיבות לסדר ועם החזרה?

$$\text{תשובה: } n^k = \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_k$$

טבלה מסכמת של שלושת המודלים

מספר האפשרויות לבחירה של k עצמים מתוך n עצמים שונים

ללא החזרה	עם חשיבות לסדר	ללא חשיבות לסדר
מודל 1	מודל 2	
$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$	
מודל 3		
n^k	-----	

חישוב הסתברויות במרחב מדגם סימטרי באמצעות קומבינטוריקה

כפי שלמדנו, במרחב מדגם סימטרי ההסתברות של המאורע A מחושבת באופן הבא:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{רצוי}}{\text{מצוי}}$$

מצוי = מספר התוצאות במרחב המדגם.

רצוי = מספר התוצאות במאורע המבוקש.

כללי הקומבינטוריקה מאפשרים למנות את מספר התוצאות ב Ω ואת מספר התוצאות במאורע המבוקש, A .

שימו לב: כאשר מדובר בהסתברות מותנית של המאורע A , בהינתן שהמאורע B התרחש, מרחב המדגם מצטמצם. כפי שלמדנו, במרחב מדגם סימטרי, ההסתברות המותנית של A בהינתן B מחושבת באופן הבא:

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

לכן, גם כאן נוכל להיעזר בכללי הקומבינטוריקה כדי למנות את מספר התוצאות במונה ובמכנה.





שאלות מנחות בחישוב הסתברויות במרחב מדגם סימטרי

1. מהו הניסוי המקרי?
2. איך נראית תוצאה אפשרית של הניסוי?
3. האם מרחב המדגם סימטרי?
4. כמה תוצאות יש במרחב המדגם?
5. מהו המאורע שרוצים לחשב את הסתברותו?
 - האם מדובר בהסתברות מותנית? אם כן – נעבור לשלב 8.
 - האם קל יותר לחשב את הסתברות המאורע המשלים? אם כן, נשתמש בעקרון המשלים.
 - האם כדאי לפצל את המאורע לאיחוד של מאורעות קטנים יותר וקלים יותר לחישוב? אם כן, נשתמש בחוק האיחוד.
6. כמה תוצאות יש במאורעות הנדרשים?
7. מוצאים את ההסתברויות (ישירות, או בעזרת עקרון המשלים, או בעזרת חוק האיחוד, וכו')
8. חישוב הסתברות מותנית:
 - כמה תוצאות יש במרחב המדגם המצומצם?
 - האם כדאי לחשב ישירות, או להשתמש בעקרון המשלים או בחוק האיחוד?
 - כמה תוצאות יש במאורעות המבוקשים, בהינתן מרחב המדגם המצומצם?
 - מוצאים את ההסתברויות לפי נוסחת ההסתברות המותנית במרחב מדגם סימטרי.





מפת התמצאות

