



ארגז הכלים – הגדרות ונוסחאות פונקציית ההסתברות

הגדרת המושג הסתברות יכולה להיעשות לפי אחת מארבע גישות¹. אנו נכיר את הגישה האקסיומטית, שבה מגדירים הסתברות באמצעות מודל מתמטי והנחות יסוד (אקסיומות).

פונקציית ההסתברות

פונקציית הסתברות P על מרחב מדגם נתון, Ω , היא פונקציה המתאימה לכל מאורע A מספר ממשי $P(A)$, שייקרא "ההסתברות של A ", כך שמתקיימות שלוש הדרישות (אקסיומות) הבאות:

$$P(\Omega) = 1 \quad \text{אקסיומה 1:}$$

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \text{אקסיומה 2: לכל מאורע } A$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{אם } A \text{ ו-} B \text{ הם מאורעות זרים אזי} \quad \text{אקסיומה 3:}$$

תכונות של הסתברות (נובעות מהאקסיומות הנ"ל)

$$1. \quad \text{עקרון המשלים: } P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad \text{לכל מאורע } A$$

$$2. \quad P(\emptyset) = 0$$

$$3. \quad \text{הכללה של אקסיומה 3:}$$

אם $A_1, A_2, \dots, A_n$ הם n מאורעות זרים, אזי הסתברות האיחוד שלהם שווה לסכום ההסתברויות:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

שימו לב: מההכללה של אקסיומה 3 נובע שההסתברות של כל מאורע ניתנת לחישוב בסכום ההסתברויות של כל התוצאות הכלולות בו (כזכור, התוצאות האפשריות הן תמיד מאורעות זרים).

$$4. \quad \text{אם } A \subseteq B \text{ אז } P(A) \leq P(B).$$

$$5. \quad \text{אם } A \text{ ו-} B \text{ הם מאורעות זרים, אז } P(A \cap B) = 0. \text{ מאורעות זרים לא יכולים להתרחש בו זמנית.}$$

¹ ניתן לדון בארבע גישות עיקריות להסתברות: גישה קלסית (הסתברות שווה לכל התוצאות האפשריות של הניסוי), גישה שכיחותנית (הסתברות כגבול של השכיחות היחסית), גישה סטטיסטית וגישה אקסיומטית.





חוק האיחוד

לכל שני מאורעות A ו-B מתקיים:

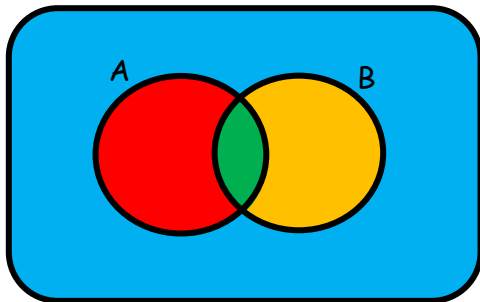
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

הכללה לשלושה מאורעות, A, B ו-C, לפי עקרון ההכללה וההפרדה:²

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

טבלה 2X2 לחישוב הסתברויות

בעבור שני מאורעות, A ו-B, ניתן לבנות טבלה 2X2 שמרכזת את ההסתברויות של כל החיתוכים האפשריים:



	A	$\bar{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

שימו לב: ארבעת החיתוכים המתוארים בלוח הם מאורעות זרים שהאיחוד שלהם הוא כל מרחב המדגם.

למשל, המאורע A הוא איחוד של שני מאורעות זרים: המאורע $A \cap B$ והמאורע $A \cap \bar{B}$,

כלומר: $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ ולכן ההסתברות של A שווה לסכום ההסתברויות בעמודה של A. באופן

דומה ניתן לחשב את ההסתברות של המאורע B וגם את ההסתברויות של המאורעות המשלימים.

איך מחשבים את הסתברות האיחוד $P(A \cup B)$?

אפשר לפי חוק האיחוד, ואפשר גם ע"י סכום הסתברויות של חיתוכים:

$$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$$

² ניתן להכליל לכל מספר סופי של מאורעות. הנוסחה מורכבת יותר.





שימו לב: בהרבה מקרים יהיו לנו נתונים חלקיים בטבלה, ומילוי הטבלה בשלמותה נעשה תוך שימוש בעקרון המשלים, ובעובדה שארבעת החיתוכים הם מאורעות זרים שאיחודם הוא כל מרחב המדגם.

חישוב ההסתברות של המאורע "A ולא B" ("רק A")

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

כללי דה-מורגן (הסתברות חיתוך המשלימים, הסתברות איחוד המשלימים)

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$$

מרחב מדגם סימטרי symmetric sample space

כאשר מרחב המדגם סופי (מספר סופי של תוצאות אפשריות), וכל התוצאות האפשריות בניסוי שוות סיכוי להתרחש, אזי מרחב המדגם נקרא **מרחב מדגם סימטרי**.

סימון:

$$|A| = \text{מספר התוצאות הכלולות במאורע } A.$$

$$|\Omega| = \text{מספר התוצאות במרחב המדגם. ("הגודל של מרחב המדגם")}$$

חישוב הסתברויות במרחב מדגם סימטרי

במרחב מדגם סימטרי, ההסתברות של כל תוצאה אפשרית היא: $\frac{1}{|\Omega|}$.

ההסתברות של מאורע A שווה למספר התוצאות במאורע A חלקי מספר התוצאות במרחב המדגם, כלומר:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

שימו לב: יש לוודא שאכן מדובר במרחב מדגם סימטרי לפני שמשתמשים בנוסחה הנ"ל.

