



ארגז הכלים – הגדרות ונוסחאות הסתברות מותנית

נוסחת ההסתברות המותנית conditional probability formula

A, B הם מאורעות במרחב מדגם נתון, כך ש $P(B) > 0$.

ההסתברות המותנית שמאורע A יתרחש בהינתן שמאורע B התרחש היא:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

מילות מפתח: "ידוע ש...", "בהינתן ש..."

הסתברות מותנית היא הסתברות שמחושבת במרחב מדגם מצומצם.

הסתברות מותנית במרחב מדגם סימטרי

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

תכונות של הסתברות מותנית

$$1. \quad P(B|B) = 1$$

$$2. \quad 0 \leq P(A|B) \leq 1$$

$$3. \quad \text{בעבור } A_1, A_2 \text{ מאורעות זרים, ומאורע } B \text{ כך ש } P(B) > 0,$$

$$P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$$

$$4. \quad \text{עקרון המשלים: } P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$$

חוק הכפל לחישוב הסתברות של חיתוך

בעבור מאורעות לא ריקים A, B במרחב מדגם נתון, מתקיים:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

ניתן לכתוב נוסחה כללית, ליותר משני מאורעות (מומלץ להיעזר בעץ הסתברויות):

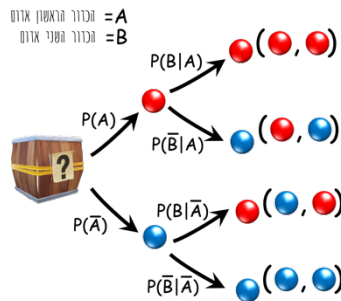
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_K) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_K|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{K-1})$$





עץ הסתברויות tree diagram

כלי עזר נוח להצגת מרחב מדגם של ניסוי מקרי רב-שלבי, ולחישובי הסתברויות.



עקרונות בבניית עץ הסתברויות:

1. עץ הסתברויות מתאים לתיאור של ניסוי מקרי המורכב ממספר שלבים.
2. הפיצול הראשון איננו מותנה, כל שאר הפיצולים מותנים.
3. בכל פיצול סכום ההסתברויות שווה תמיד ל-1.
4. הליכה לאורך מסלול בעץ מתחילתו ועד סופו מובילה לתוצאה אחת ממרחב המדגם של הניסוי הרב-שלבי.
5. כאשר הולכים לאורך מסלול בעץ מכפילים הסתברויות (יישום של חוק הכפל להסתברות של חיתוך).
6. כאשר המאורע המבוקש מורכב ממספר מסלולים בעץ, ההסתברות מחושבת על-ידי סכום ההסתברויות של המסלולים שבונים אותו (מסלולים שלמים הם מאורעות זרים, כי הם מבטאים תוצאות שונות ממרחב המדגם של הניסוי הרב-שלבי).
7. ניתן להמחיש את נוסחת ההסתברות השלמה בעץ הסתברויות.
8. ניתן להיעזר בעץ גם לנוסחת בייס: המכנה מבטא את העץ המצומצם, והמונה מבטא את המאורע המבוקש בתוך העץ המצומצם. לכן במונה יהיו חלק מהמחוברים שנמצאים במכנה.

נוסחת ההסתברות השלמה total probability formula

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$

ניסוח כללי של נוסחת ההסתברות השלמה:

$A_1, A_2, \dots, A_n$ מאורעות זרים (לא ריקים) שהאיחוד שלהם הוא כל מרחב המדגם. ההסתברות של B היא:

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n)$$





נוסחת בייס Bayes' rule/theorem

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$$

ניסוח כללי של נוסחת בייס:

$A_1, A_2, \dots, A_n$ מאורעות זרים (לא ריקים) שהאיחוד שלהם הוא כל מרחב המדגם:

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{j=1}^n P(A_j)P(B|A_j)} \quad k = 1, \dots, n$$

שימו לב: בנוסחת בייס המונה הוא מחובר אחד מבין כל המחברים שבמכנה.

איך יודעים מתי להשתמש בנוסחת בייס?

כאשר אנו יודעים לחשב את ההסתברות המותנית בכיוון אחד, אבל השאלה היא על ההסתברות המותנית בכיוון

ההפוך (יודעים את ההסתברות של B בהינתן A אבל שואלים על ההסתברות של A בהינתן B)

מאורעות בלתי תלויים independent events

מאורעות בלתי תלויים משקפים מצב שבו הידיעה שמאורע אחד התרחש לא משפיעה על ההסתברות שהמאורע השני יתרחש.

הגדרה: מאורעות A ו-B נקראים מאורעות בלתי תלויים אם

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

תנאים שקולים (בעבור מאורעות לא ריקים):

$$(1) \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \text{הסתברות החיתוך שווה למכפלת ההסתברויות.}$$

$$(2) \quad P(A|B) = P(A) \quad \text{הידיעה שהמאורע B התרחש לא משפיעה על ההסתברות של A.}$$

$$(3) \quad P(B|A) = P(B) \quad \text{הידיעה שהמאורע A התרחש לא משפיעה על ההסתברות של B.}$$

שימו לב:

אם אחד התנאים מתקיים, אז שלושת התנאים מתקיימים, ואז נאמר ש A ו-B הם מאורעות בלתי תלויים (ב"ת).

אם אחד התנאים לא מתקיים, אז שלושת התנאים לא מתקיימים, ואז נאמר ש A ו-B הם מאורעות תלויים.





שימו לב:

אם A ו- B הם מאורעות בלתי תלויים אז: A ו- $\bar{B}$ הם מאורעות בלתי תלויים, $\bar{A}$ ו- B הם מאורעות בלתי תלויים, $\bar{A}$ ו- $\bar{B}$ הם מאורעות בלתי תלויים.

שימו לב:

אם $P(A|B) = P(A|\bar{B})$ או $P(B|A) = P(B|\bar{A})$ אז A ו- B הם מאורעות בלתי תלויים.

ניסויים בלתי תלויים independent trials

כאשר ידיעת התוצאה שהתקבלה בניסוי אחד אינה משפיעה על ההסתברויות של התוצאות האפשריות בניסוי השני, נאמר שהניסויים בלתי תלויים. לכן, מאורעות שהוגדרו על סדרת ניסויים בלתי תלויים, כך שכל מאורע מתייחס לניסוי אחר, יהיו מאורעות בלתי תלויים.

לפעמים מהסיפור עצמו ברור שהמאורעות בלתי תלויים כי הם מתייחסים לניסויים בלתי תלויים. למשל הטלות קובייה, הטלות מטבע, הוצאת כדורים מקופסה באופן מקרי ועם החזרה.

מאורעות זרים לעומת מאורעות בלתי תלויים

אם A ו- B הם מאורעות בלתי תלויים אז:

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(B|A) = P(B)$$

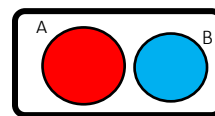
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

"אי-תלות" מתייחסת להסתברות שמאורע יתרחש

בהינתן מידע על מאורע אחר.

הידיעה לא משנה את ההסתברות $\leq$ מאורעות ב"ת

הסתברות החיתוך = מכפלת ההסתברויות

אם A ו- B הם מאורעות זרים אז:

$$A \cap B = \phi$$

$$P(A \cap B) = 0$$

A ו- B לא יכולים להתרחש בו זמנית

"זרות" מתייחסת לתוצאות שיש במאורעות.

אין תוצאות משותפות $\leq$ מאורעות זרים

הסתברות האיחוד = סכום ההסתברויות

שימו לב: אם A ו- B הם מאורעות זרים שאינם ריקים, אז הם בהכרח תלויים.