



חוברת תרגילים

משתנה מקרי בדיד

הגדרה

1. מטילים מטבע 3 פעמים.

בכל סעיף יש הגדרה של X , ועליכם לציין האם X הוא משתנה מקרי או לא.

א. $X =$ מספר הפעמים שהתקבל H .

ב. $X =$ בכל ההטלות התקבלה אותה תוצאה.

ג. $X =$ מקבל את הערך 1 אם בהטלה הראשונה התקבל H ,

ומקבל את הערך 0 אם בהטלה הראשונה התקבל T .

2. בקופסה יש 20 כדורים: 12 אדומים, 8 כחולים.

א. מוציאים מהקופסה שני כדורים באופן מקרי וללא החזרה.

נגדיר: $X =$ מספר הכדורים האדומים שהוצאו.

מהם הערכים האפשריים של X ?

ב. מוציאים מהקופסה שני כדורים באופן מקרי ועם החזרה.

נגדיר: $Y =$ מספר הכדורים האדומים שהוצאו.

מהם הערכים האפשריים של Y ?

3. להלן הגדרות של משתנים מקריים. ציינו האם המשתנה המוגדר הוא משתנה מקרי בדיד או רציף:

א. הניסוי המקרי: דוגמים סטודנט מהאוניברסיטה ומוודדים את גובהו.

המשתנה המקרי: $X =$ הגובה של הסטודנט.

ב. הניסוי המקרי: דוגמים סטודנט מהאוניברסיטה ושואלים אותו כמה פעמים הוא ביקר בספרייה בשבוע האחרון.

המשתנה המקרי: $Y =$ מספר הפעמים שהסטודנט ביקר בספרייה.

ג. הניסוי המקרי: מטילים קובייה שוב ושוב עד הפעם הראשונה שבה מתקבלת תוצאה זוגית ואז עוצרים.

המשתנה המקרי: $Z =$ מספר ההטלות עד העצירה.

ד. הניסוי המקרי: מטילים קובייה 10 פעמים.

המשתנה המקרי: $V =$ מספר הפעמים שהתקבלה תוצאה זוגית.

ה. הניסוי המקרי: הגעת אימיילים לתיבת הדוא"ל ביום ראשון.

המשתנה המקרי: $U =$ מספר האימיילים שמגיעים בין 10:00 ל-11:00.

ו. הניסוי המקרי: הגעת אימיילים לתיבת הדוא"ל ביום ראשון.

המשתנה המקרי: $T =$ משך הזמן שעובר בין הגעת האימייל הראשון להגעת האימייל השני.





התפלגות של משתנה מקרי בדיד

1. מטילים מטבע הוגן 3 פעמים.

נגדיר: X = מספר הפעמים שהתקבל H.

Y = מספר הפעמים שהתקבל T.

א. (1) מהי ההתפלגות של X ?

(2) האם ההתפלגות של X סימטרית?

(3) חשבו את ההסתברויות של המאורעות הבאים: $\{2 \leq X \leq 3\}$ $\{X > 1\}$ $\{X \geq 1\}$

ב. מהי ההתפלגות של Y ?

ג. (1) האם ל- X ול- Y יש אותה התפלגות?

(2) האם X ו- Y שווים?

2. בקופסה יש 20 כדורים: 12 אדומים, 8 כחולים.

א. מוציאים מהקופסה שני כדורים באופן מקרי וללא החזרה.

נגדיר: X = מספר הכדורים האדומים שהוצאו.

מהי ההתפלגות של X ?

ב. מוציאים מהקופסה שני כדורים באופן מקרי ועם החזרה.

נגדיר: Y = מספר הכדורים האדומים שהוצאו.

מהי ההתפלגות של Y ?

ג. מוציאים מהקופסה שני כדורים באופן מקרי ועם החזרה.

נגדיר משתנה מקרי I שיקבל את הערך 1 אם הוצאו שני כדורים באותו צבע,

ויקבל את הערך 0 אם הוצאו שני כדורים בצבעים שונים.

מהי ההתפלגות של I ?

3. שלושה אנשים הגיעו למלון וכל אחד הזמין חדר.

פקיד הקבלה החזיק את שלושת המפתחות לחדרים שלהם, ונתן לכל אחד מהם מפתח באופן אקראי.

כלומר: כל אחד מהם קיבל מפתח, אך לא בטוח שקיבל את המפתח לחדר שהזמין,

ולכל אפשרות של מסירת המפתחות לאנשים יש אותה הסתברות.

א. מהו מרחב המדגם המתאים לניסוי המקרי?

ב. נגדיר: X = מספר האנשים שקיבלו את המפתח הנכון (לחדר שהזמינו).

(1) מהם הערכים האפשריים של X ?

(2) מהי ההתפלגות של X ?

ג. מהי ההסתברות שלפחות אדם אחד קיבל את המפתח הנכון?





תוחלת של משתנה מקרי בדיד

1. מטילים קובייה הוגנת פעם אחת.

נגדיר: X = התוצאה בהטלת הקובייה.

מהי התוחלת של X ?

2. בקופסה יש 20 כדורים: 12 אדומים, 8 כחולים.

א. מוציאים מהקופסה שני כדורים באופן מקרי וללא החזרה.

נגדיר: X = מספר הכדורים האדומים שהוצאו.

מהי התוחלת של X ?

ב. מוציאים מהקופסה שני כדורים באופן מקרי ועם החזרה.

נגדיר: Y = מספר הכדורים האדומים שהוצאו.

מהי התוחלת של Y ?

ג. מוציאים מהקופסה שני כדורים באופן מקרי ועם החזרה.

נגדיר משתנה מקרי I שיקבל את הערך 1 אם הוצאו שני כדורים באותו צבע,

ויקבל את הערך 0 אם הוצאו שני כדורים בצבעים שונים.

מהי התוחלת של I ?

3. שלושה אנשים הגיעו למלון וכל אחד הזמין חדר.

פקיד הקבלה החזיק את שלושת המפתחות לחדרים שלהם, ונתן לכל אחד מהם מפתח באופן אקראי.

כלומר: כל אחד מהם קיבל מפתח, אך לא בטוח שקיבל את המפתח לחדר שהזמין,

ולכל אפשרות של מסירת המפתחות לאנשים יש אותה הסתברות.

נגדיר: X = מספר האנשים שקיבלו את המפתח הנכון (לחדר שהזמינו).

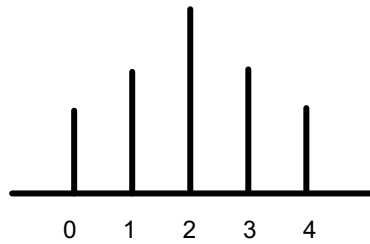
מהי התוחלת של X ?



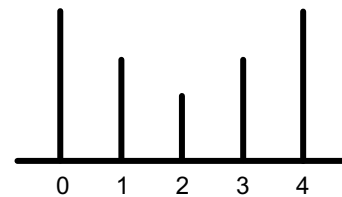
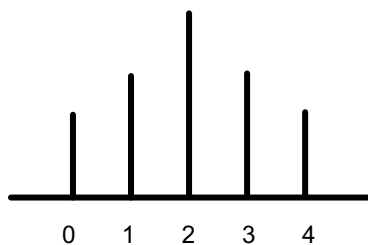


שונות של משתנה מקרי בדיד

1. להלן שתי התפלגויות. באיזו התפלגות השונות גדולה יותר?



2. להלן שתי התפלגויות. באיזו התפלגות השונות גדולה יותר?



נוסחת עבודה לשונות

1. מטילים קובייה הוגנת פעם אחת.

נגדיר: X = התוצאה בהטלת הקובייה.

מהי השונות של X ? מהי סטיית התקן של X ?

2. בקופסה יש 20 כדורים: 12 אדומים, 8 כחולים.

א. מוציאים מהקופסה שני כדורים באופן מקרי וללא החזרה.

נגדיר: X = מספר הכדורים האדומים שהוצאו.

מהי השונות של X ? מהי סטיית התקן של X ?

ב. מוציאים מהקופסה שני כדורים באופן מקרי ועם החזרה.

נגדיר: Y = מספר הכדורים האדומים שהוצאו.

מהי השונות של Y ?

ג. מוציאים מהקופסה שני כדורים באופן מקרי ועם החזרה.

נגדיר משתנה מקרי I שיקבל את הערך 1 אם הוצאו שני כדורים באותו צבע,

ויקבל את הערך 0 אם הוצאו שני כדורים בצבעים שונים.

מהי השונות של I ?





3. שלושה אנשים הגיעו למלון וכל אחד הזמין חדר.

פקיד הקבלה החזיק את שלושת המפתחות לחדרים שלהם, ונתן לכל אחד מהם מפתח באופן אקראי.

כלומר: כל אחד מהם קיבל מפתח, אך לא בטוח שקיבל את המפתח לחדר שהזמין, ולכל אפשרות של מסירת

המפתחות לאנשים יש אותה הסתברות.

נגדיר: X = מספר האנשים שקיבלו את המפתח הנכון (לחדר שהזמינו).

מהי השונות של X ?

תכונות התוחלת והשונות

1. בקופסה יש 20 כדורים: 12 אדומים, 8 כחולים.

מוציאים מהקופסה שני כדורים באופן מקרי וללא החזרה.

נגדיר: X = מספר הכדורים האדומים שהוצאו.

Y = מספר הכדורים הכחולים שהוצאו.

נסמן: $T = X + Y$

א. האם T הוא משתנה מקרי?

ב. מהי התוחלת של T ומהי השונות של T ?

2. בקופסה יש 20 כדורים: 12 אדומים, 8 כחולים.

המשחק בקזינו מתנהל באופן הבא:

השחקן מוציא מהקופסה שני כדורים באופן מקרי וללא החזרה.

השחקן משלם 6 ש"ח על כל הוצאת כדור, ומקבל 10 ש"ח על כל כדור אדום שהוצא.

נגדיר: X = מספר הכדורים האדומים שהוצאו.

R = הרווח של השחקן בהוצאת שני כדורים.

א. מה הקשר בין X ל- R ? הציגו נוסחה שמתארת את הקשר.

ב. האם R הוא משתנה מקרי?

ג. מצאו את התוחלת של R בעזרת התוחלת של X .

ד. מצאו את השונות של R בעזרת השונות של X .





3. מבחן מורכב מ-20 שאלות רב-ברירה. לכל שאלה יש 4 תשובות אפשריות שרק אחת מהן נכונה. סטודנט מנחש את התשובות לכל אחת מהשאלות.

נגדיר: X = מספר התשובות הנכונות שהסטודנט סימן.

Y = מספר התשובות השגויות שהסטודנט סימן.

נתון שהתוחלת של X היא 5, והשונות של X היא 3.75.

א. מה הקשר בין X ל- Y ?

ב. מצאו את התוחלת ואת השונות של Y על-סמך הקשר בין X ל- Y .

הציון במבחן מחושב באופן הבא: על כל תשובה נכונה מקבלים 6 נקודות, ועל כל תשובה שגויה יורדת חצי נקודה.

נגדיר: S = הציון של הסטודנט במבחן.

ג. מהי הנוסחה המקשרת בין X ל- S ?

ד. מצאו את התוחלת ואת השונות של S .





משתנה מקרי בדיד תשובות

הגדרה

1. א. X הוא משתנה מקרי. ב. X איננו משתנה מקרי. ג. X הוא משתנה מקרי.
2. א. $0,1,2$ ב. $0,1,2$
3. א. מ"מ רציף. ב. מ"מ בדיד. ג. מ"מ בדיד. ד. מ"מ בדיד. ה. מ"מ בדיד. ו. מ"מ רציף.

התפלגות של משתנה מקרי בדיד

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

1. א. (1)

2. ב. כן.

$$P(X \geq 1) = \frac{7}{8} \quad P(X > 1) = \frac{1}{2} \quad P(2 \leq X \leq 3) = \frac{1}{2}$$

ב.

k	0	1	2	3
$P(Y = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

ג. 1. כן. 2. לא.

k	0	1	2
$P(X = k)$	$\frac{56}{380}$	$\frac{192}{380}$	$\frac{132}{380}$

2. א.

k	0	1	2
$P(Y = k)$	0.16	0.48	0.36

ב.

k	0	1
$P(I = k)$	0.48	0.52

ג.

3. א. תוצאה של הניסוי היא שלשה. למשל $(2,1,3)$ 'א' קיבל את מפתח 2, 'ב' קיבל את מפתח 1, 'ג' קיבל את מפתח 3.

מרחב המדגם: $\Omega = \{(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)\}$

ב. 1. $0,1,3$

k	0	1	3
$P(X = k)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$

2.

$$P(X \geq 1) = \frac{4}{6}$$

ג.



**תוחלת של משתנה מקרי בדיד**

1. $E(X) = 3.5$

2. א. $E(X) = 1.2$ ב. $E(Y) = 1.2$ ג. $E(I) = 0.52$

3. $E(X) = 1$

שוונות של משתנה מקרי בדיד

1. בהתפלגות הימנית.

2. בהתפלגות הימנית.

נוסחת עבודה לשונות

1. $Var(X) = 2.917$ $\sigma = 1.708$

2. א. $\sigma = 0.675$ $Var(X) = 0.455$ ב. $Var(Y) = 0.48$ ג. $Var(I) = 0.2496$

3. $Var(X) = 1$

תכונות התוחלת והשוונות

1. א. כן. ב. $Var(T) = 0$ $E(T) = 2$

2. א. $R = 10X - 12$ ב. כן. ג. $E(R) = 0$ ד. $Var(R) = 45.5$

3. א. $X + Y = 20$

ב. $Var(Y) = 3.75$ $E(Y) = 15$

ג. $S = 6.5X - 10$

ד. $Var(S) = 158.4375$ $E(S) = 22.5$

